

# **Polarisierte Photonen**

Überraschende und beeindruckende  
Experimente mit polarisierten  
Photonen und ihre  
Interpretation

Fachbereichsarbeit aus  
Physik

eingereicht bei

**Prof. Mag. Ludwig Moser**

Musisches Gymnasium,  
Haunspergstraße 77, 5020 Salzburg

von

**Thomas Hausmaninger**

Salzburg, 24. Februar 2006

## Vorwort

Als kleines Kind, wenn mein Vater von Dingen sprach, die mit seinem Fach Physik als AHS Lehrer zu tun hatten, staunte ich immer, mit wie vielen Dingen diese Physik zu tun hat. Physik war für mich schon, seit ich mich erinnern kann, ein magisches Wort, denn es konnte einfach alles erklären. Dieses Erklären war für mich zwar oft sehr unverständlich, jedoch war es schön zu wissen, dass es für alles einen guten Grund gibt. Je älter ich wurde, desto besser verstand ich die Dinge, welche mir mein Vater geduldig erklärte und umso mehr faszinierte mich die Natur mit ihren unendlich vielen versteckten Details, die erst bei genauerem Hinsehen sichtbar werden. Ich entdeckte, wie viele Fragen gestellt werden können und hinter wie vielen alltäglichen Dingen komplexe Vorgänge und Systeme stecken. Das schönste dabei war, dass ich lernte die Natur dabei zu bewundern.

Bis jetzt ist diese Bewunderung durch nichts gemindert worden und auch das Wort Physik ist für mich nach wie vor ein Feuerwerk an Assoziationen. Jedoch gerade die Physik hat mir nun gezeigt, dass Dinge oder Eigenschaften existieren – oder zumindest existieren könnten –, für die es keinen Grund gibt. Für die Quantenphysik sind die Prinzipien der Lokalität und der Realität nicht überall gültig. Damit schließt sie aus, dass bestimmte Messergebnisse kausal sind, sodass es keinen Grund für die Ergebnisse dieser Messungen gibt. Diese Theorie war Gesprächsthema von meinem Vater und mir bei vielen Gelegenheiten. Die Quantenphysik ist wohl eine der faszinierendsten Theorien, die es in der Physik gibt, da sie ganz im Gegensatz zu unseren Alltagserfahrungen steht. Sie zwingt einen darüber nachzudenken, ob es Dinge geben kann, die man überhaupt nicht mit unseren Alltagserfahrungen erfassen kann. Auch die Beschränkung des menschlichen Wortschatzes auf unsere Alltagserfahrungen wurde mir und meinem Vater durch die Gespräche und durch das Lesen verschiedener Deutungs- bzw. Erklärungsversuche klar. Ein interessanter Prozess, den ich an mir dabei beobachten konnte, war, dass ich mich immer mehr an die Aussagen der Quantenphysik zu gewöhnen schien und ich sie immer mehr so wie auch zum Beispiel das Gravitationsgesetz akzeptierte. Es stellt sich mir nun die Frage, warum fällt es so

leicht das Gravitationsgesetz zu akzeptieren und warum fällt es so schwer, die Aussagen der Quantenphysik so hinzunehmen wie sie sind? Meine persönliche Antwort ist, dass wir die Gravitation jeden Morgen spüren und wahrnehmen, wenn wir aus dem Bett steigen. Hingegen die Aussagen der Quantenphysik betreffen uns im Alltag kaum oder überhaupt nicht. Erst bei der Beschäftigung mit so kleinen Teilchen wie Photonen kann der Mensch die Auswirkungen der Quantenphysik erfahren. Durch dieses Erfahrung kann er dann auch die dazu nötige Theorie akzeptieren. Das schönste bei der Beschäftigung mit der Quantenphysik ist für mich, dass mir wieder einmal vor Augen geführt wird, wie kompliziert und faszinierend die Natur ist. Und es wurde mir dadurch auch erneut möglich mich darüber zu wundern, warum ein Kugelschreiber, der mir aus der Hand gleitet, Richtung Erde fällt und nicht einfach zufällig in irgend eine Richtung weg fliegt.

An dieser Stelle möchte ich mich auch noch einmal bei meinem Vater bedanken, der mir durch sein geduldiges und oft wiederholtes Erklären gezeigt hat, wie schön es ist die Natur zu bewundern. Ohne die vielen Gespräche mit ihm wäre diese Arbeit wohl überhaupt nicht zustande gekommen. Genauso gilt der Dank meiner Mutter, die mir als Philosophielehrerin gezeigt hat, wie wichtig es ist, Aussagen der Physik nicht nur durch die starre Brille der Mathematik, sondern auch als Mensch zu sehen, der in der Lage ist, sich mehr Gedanken über eine Aussage zu machen als, ob sie wahr oder falsch ist. Außerdem hat sie als eine Person, die sich noch nicht mit dem Thema auseinandergesetzt hat, die Arbeit auf Verständlichkeit überprüft und dabei viele Fehler entdeckt.

Salzburg, Februar 2006

Thomas Hausmaninger

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Licht - Die Grundlagen</b>	<b>6</b>
1.1 Licht: Welle oder Teilchen?	6
1.2 Die Polarisation des Lichtes	7
1.3 Die Erzeugung von polarisiertem Licht mit Polarisationsfiltern	8
<b>2 Anwendung von polarisiertem Licht in der klassischen Physik</b>	<b>9</b>
2.1 Polarimeter	9
2.2 Doppelbrechende Körper	9
2.3 Spannungsoptik	11
<b>3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik</b>	<b>13</b>
3.1 Eigenschaften und Verhalten	13
3.1.1 Ein kleines Experiment mit polarisiertem Licht	13
3.1.2 Von der Intensität zur Photonenanzahl	16
3.1.3 Messungen in der Quantenphysik	16
3.1.3.1 Das Projektionspostulat	16
3.1.3.2 Der Quanten-Zenon-Effekt	17
3.2 Korrelierte Photonen	20
3.3 Das Ende der Lokalität und der Realität	22
3.3.1 Das EPR Paradoxon in Anwendung auf polarisierte Photonen	22
3.3.2 Die Bellsche Ungleichung	23
3.3.3 Die Folgen	26
3.3.4 Ein letzter „Rettungsversuch“	28
3.4 Quantenkryptographie	29
3.5 Die wechselwirkungsfreie Quantenmessung	31

# Einleitung

In dieser Fachbereichsarbeit möchte ich mittels einiger Experimente mit polarisierten Photonen die Aussagen der Quantenphysik darstellen. Es geht mir dabei weder um die detaillierte technische Durchführung noch um den exakten mathematischen Hintergrund. Vielmehr möchte ich mithilfe von möglichst anschaulichen Experimenten einen kleinen Einblick in die Welt der Quantenphysik geben. Zur Erläuterung der Experimente habe ich mein aus verschiedenen Büchern gesammeltes Wissen zusammengetragen und so versucht, die Ergebnisse möglichst einfach und klar darzustellen. Da die Quantenphysik ein sehr schwieriges Gebiet ist, gibt es relativ wenig populärwissenschaftliche Literatur dazu. Meine Hauptaufgabe sah ich daher darin, mir durch das Lesen von Fachliteratur und auch durch Gespräche mit meinem Vater ein grundsätzliches Verständnis der Experimente anzueignen, um diese Arbeit verfassen zu können. Außerdem versuchte ich durch die grafische Darstellung mit Skizzen die schriftlichen Erläuterungen zu unterstützen.

# 1 Licht - Die Grundlagen

## 1.1 Licht: Welle oder Teilchen?

Licht war seit jeher eine Erscheinung, die den Menschen faszinierte, und es haben sich viele Gedanken darüber gemacht, was das Licht sei, wie es entstehe und welche Eigenschaften es habe. So auch im 17. Jh. Christian Huygens (1629-1695). Dieser stellte sich das Licht als Welle vor. Im Gegensatz dazu hatte Sir Isaac Newton (1643-1727) die Vorstellung von Licht als kleinen Teilchen.

Zwischen den beiden Theorien entstand nun ein Wettkampf, der viele Fragen aufwerfen sollte: Durch die Wellentheorie konnte nicht erklärt werden, wie das Licht durch das Vakuum von der Sonne zur Erde kommt, denn was sollte schwingen, wenn „Nichts“ ist? Jedoch wurde die Wellentheorie durch Thomas Young (1773-1829) wieder gestützt, als dieser das Interferenzprinzip aufstellte. Dieses besagt, dass sich Wellentäler und Wellenberge gegenseitig auslöschen bzw. verstärken. So konnten Interferenzerscheinungen erklärt werden, die entstehen, wenn sich Licht überlagert. Die Teilchentheorie wurde dann vollkommen verworfen, weil nachgewiesen wurde, dass das von Newton auf Teilchenbasis aufgestellte Brechungsgesetz nicht mit der in einem dichten Medium gemessenen Lichtgeschwindigkeit zusammenpasst (Brechung resultiert aus den unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeiten in verschiedenen Medien).

Später konnte auch noch die Polarisierung des Lichts, auf die ich dann genauer eingehen werde, durch die Wellentheorie erklärt werden und James Clerk Maxwell (1831-1879) und Hertz erkannten, dass das sichtbare Licht eine elektromagnetische Welle ist. Somit gab es fast keinen Zweifel mehr an der Wellentheorie. Mit nur noch zwei großen ungeklärten Problemen plagte das Licht die Physiker: mit dem Hohlraumstrahler und dem Photoelektrischen Effekt. Diese zwei Probleme waren es auch, welche die Teilchentheorie wieder zum Leben erweckten.

## 1 Licht - Die Grundlagen

Zuerst errechnete Planck, dass das Licht in Wellenpakete eingeteilt werden muss, um, vereinfacht ausgedrückt, die experimentell bestimmte Energieverteilung auf die einzelnen Frequenzen eines Hohlraumstrahlers herauszubekommen. Die Energie der Wellenpakete bestimmte er mit  $E = h \cdot f$ , wobei  $h$  das so genannte *Planck'sche Wirkungsquantum* ist.

$$h \approx 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Planck betrachtete diese Theorie jedoch nur als Notlösung, da sie mit der Wellentheorie nicht wirklich vereinbar war.

Dann erklärte Einstein den Photoelektrischen Effekt, durch welchen ein negativ geladenes Metall durch Bestrahlung mit Licht entladen wird, damit, dass Lichtteilchen (Photonen) Elektronen aus dem Metall herausschlagen.

Die Energie dieser Photonen wurde auch mit  $E = h \cdot f$  bestimmt. Nun stand man vor dem Problem, dass man Fälle hatte, für welche man die Teilchentheorie brauchte (z.B.: Photoelektrischer Effekt) und Fälle, für die man die Wellentheorie brauchte (z.B.: Beugung). Man kam dann zu der so genannten *Bornschen Deutung*, dass das Quadrat der Amplitude einer Lichtwelle der Wahrscheinlichkeit proportional ist, Photonen in einem bestimmten Raumbereich anzutreffen. Das heißt, dass das Licht aus Teilchen (Photonen) besteht, deren Aufenthaltswahrscheinlichkeit durch eine Wellenfunktion angegeben wird.

### 1.2 Die Polarisation des Lichtes

Nun möchte ich zum eigentlichen Thema der Fachbereichsarbeit kommen, der Polarisation des Lichts. In der Wellentheorie gesehen ist Licht eine Transversalwelle, das heißt, die Schwingungsrichtung ist normal zur Ausbreitungsrichtung, daher ist auch eine Polarisation der Welle möglich. Linear polarisiert ist eine Welle dann, wenn sie nur in einer bestimmten Schwingungsebene bzw. Polarisationssebene schwingt (Abbildung 1.1). Die einzelnen Photonen sind ebenfalls polarisiert. In weiterer Folge werde ich an Stelle von „linear polarisiert“ einfach den Ausdruck „polarisiert“ verwenden.

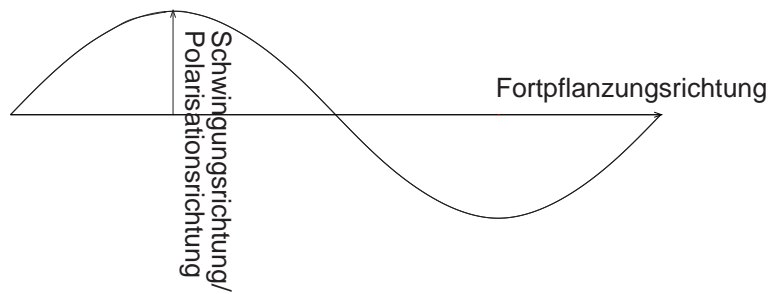


Abbildung 1.1: Welle

### 1.3 Die Erzeugung von polarisiertem Licht mit Polarisationsfiltern

Am häufigsten wird polarisiertes Licht erzeugt, indem man das unpolarisierte Licht (die einzelnen Photonen besitzen eine zufällige Schwingungsebene) durch einen Polarisationsfilter schickt, der nur Licht durchlässt, das in eine bestimmte Richtung polarisiert ist. Das heißt, das Licht, das den Polarisationsfilter passiert, hat danach eine einheitliche Schwingungsebene und wird von einem zweiten Polarisationsfilter, der normal zum ersten steht, vollständig blockiert (Abbildung 1.2)<sup>1</sup>. (Ein anderer Weg ist, durch Reflexion das polarisierte Licht zu erzeugen. Jedoch wird das für quantenmechanische Untersuchungen im Normalfall nicht verwendet.)

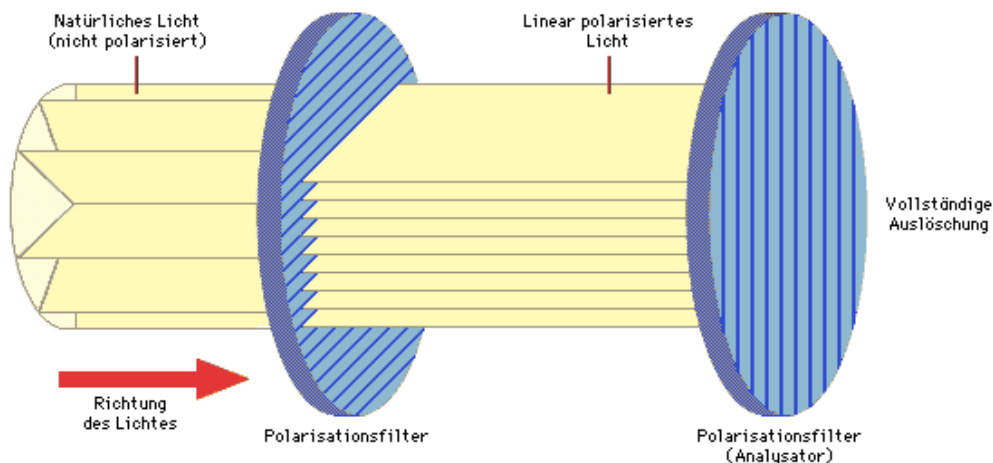


Abbildung 1.2: Polarisation

<sup>1</sup>Microsoft, Encarta Enzyklopädie 2004, Computersoftware



## **2 Anwendung von polarisiertem Licht in der klassischen Physik**

### **2.1 Polarimeter**

Um die Theorie von polarisiertem Licht vertrauter zu machen, möchte ich einige Anwendungsgebiete davon vorstellen. Ein wichtiges Anwendungsgebiet von polarisiertem Licht in der Industrie und im Labor ist die Polarimetrie bzw. das so genannte Polarimeter. „Mit einem Polarimeter kann man die optische Aktivität bzw. den Drehwert einer chemischen Substanz messen.“<sup>1</sup> Beim Durchdringen eines optisch aktiven Körpers bzw. eines optisch aktiven Stoffes ändert sich die Polarisationsrichtung eines polarisierten Lichtstrahls. Dies wird für das Polarimeter ausgenutzt, indem man die Polarisationsrichtung vor und nach dem Durchdringen einer Substanz misst und vergleicht und dadurch den Drehwinkel bzw. den Drehwert (Stärke der optischen Aktivität) der Substanz herausbekommt. Durch diesen Drehwert kann dann z.B. die Konzentration einer Zuckerlösung bestimmt werden, da der Drehwert einer Zuckerlösung mit der Konzentration ansteigt.

### **2.2 Doppelbrechende Körper**

„Als Doppelbrechung (auch Birefringenz) bezeichnet man in der Optik die Aufteilung eines Lichtstrahls in zwei Teilstrahlen (den ordentlichen und den außerordentlichen Strahl), wenn er durch ein optisch anisotropes, meistens kristallines Material wie z.B. Kalzit läuft. Sie wurde von Erasmus Bartholin 1669 entdeckt.“<sup>2</sup> (Die optische Achse des Körpers steht hier schräg zum einfallenden Strahl). In Abbildung 2.1 kann man sich das unpolarisierte Licht

---

<sup>1</sup>Online, <http://de.wikipedia.org/wiki/Polarimetrie>, 31. Oktober 2005

<sup>2</sup>Online, <http://de.wikipedia.org/wiki/Doppelbrechung>, 15. Jänner 2006

## 2 Anwendung von polarisiertem Licht in der klassischen Physik

in einen horizontal und einen vertikal schwingenden Anteil zerlegt denken. Der horizontal polarisierte Anteil des Lichtstrahls schwingt normal zur Hauptebene (und da die Hauptebene parallel zum Lichtstrahl und der optischen Achse ist, auch normal zur optischen Achse) und die Lichtgeschwindigkeit im Kristall ist in jede Richtung gleich groß. Dieser Teil wird daher nicht gebrochen. Der vertikal polarisierte Anteil schwingt parallel zur Hauptebene, die Lichtgeschwindigkeit ist daher von der Richtung abhängig und der Lichtstrahl wird gebrochen. (Abbildung 2.1, die optische Achse liegt in allen Abbildungen dieser Arbeit in der Zeichenebene.)

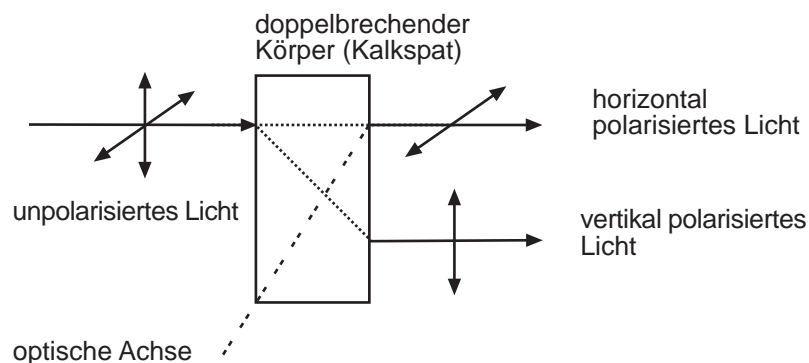


Abbildung 2.1: Ein Doppelbrechender Körper teilt den Lichtstrahl in zwei normal aufeinander polarisierte Teilstrahlen auf

Diese doppelbrechenden Körper eignen sich besonders gut zur Messung der Polarisationsrichtung in der Quantenkryptographie (Siehe Kapitel 3.4). Denn im Gegensatz zu Polarisationsfiltern werden hier die normal zur optischen Achse polarisierten Photonen nicht absorbiert, sondern abgelenkt und man kann so sicher gehen, dass ein Photon nicht nur im Experimentaufbau verloren gegangen ist, sondern wirklich die entsprechende Polarisationsrichtung hat. (Abbildung 2.2)

Ein Lichtstrahl, welcher weder parallel noch normal zur optischen Achse des doppelbrechenden Körpers steht, wird auf zwei Strahlen aufgespalten. Der ungebrochene Strahlteil ist dann parallel und der gebrochene normal zur optischen Achse polarisiert. Die Intensität der zwei Strahlteile lässt sich genauso berechnen wie bei einem Polarisationsfilter (siehe Kapitel 3.1.1).

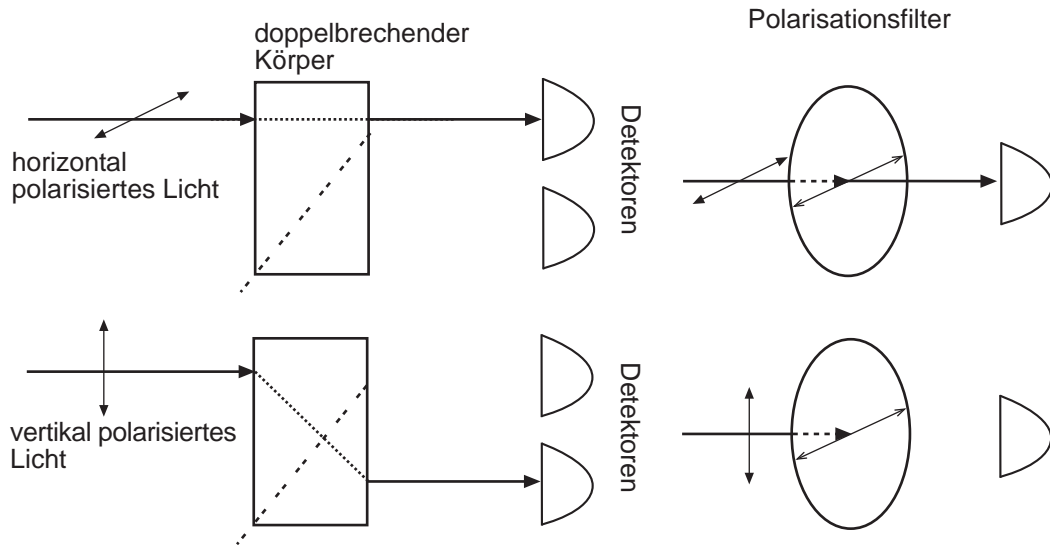


Abbildung 2.2: Unterschied zwischen einem doppelbrechenden Körper und einem Polarisationsfilter

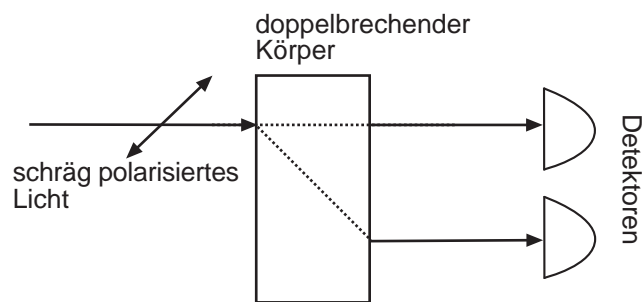


Abbildung 2.3: Licht, das weder parallel noch entgegengesetzt zur optischen Achse des doppelbrechenden Körpers steht, wird aufgespalten

## 2.3 Spannungsoptik

Eine weitere Anwendung von polarisiertem Licht ist die Spannungsoptik, die ich hier wegen ihrer ehemals großen praktischen Bedeutung kurz vorstellen möchte. „Als Spannungsoptik wird ein Teilgebiet der Optik bezeichnet, in dem durch die Verwendung von polarisiertem Licht die Spannungsverteilung in durchsichtigen Körpern untersucht wird.“<sup>3</sup> Viele durchsichtige Körper wie durchsichtiger Kunstharz werden bei Belastung doppelbrechend. Das wird ausgenutzt, um zum Beispiel Stellen von Kranhaken zu finden, die besonders hohen Belastungen ausgesetzt sind.

<sup>3</sup>Online, <http://de.wikipedia.org/wiki/Spannungsoptik>, 15.Jänner 2006

## 2 Anwendung von polarisiertem Licht in der klassischen Physik

Dazu wird ein Modell des Hakens aus Kunstharz ( angefertigt, das im Labor einer Belastung ausgesetzt wird. Durch diese Belastung wird das Material nun an belasteten Stelle doppelbrechend. Durch dieses Versuchsobjekt schickt man nun linear polarisiertes Licht (normal zur optischen Achse des Körpers). Dann fällt das Licht durch einen Polarisationsfilter und wird anschließend auf einen Schirm zur Beobachtung projiziert. Das durch die unterschiedlich stark ausgeprägte Doppelbrechung an verschiedenen Stellen unterschiedlich polarisierte Licht wurde durch den Filter unterschiedlich stark absorbiert. Außerdem werden bei weißem Licht die Farben unterschiedlich stark durch die Doppelbrechung beeinflusst und es entsteht so ein vielfarbiges Bild, aus dem die unterschiedliche Belastung des Objekts sichtbar wird (siehe Abbildung 2.4)<sup>4</sup>. Heute ist die Spannungsoptik weitgehend durch den Einsatz von Computern ersetzt worden.

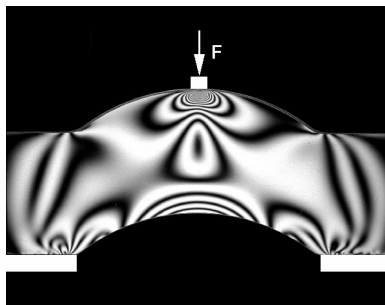


Abbildung 2.4: Ein „Brückenbogen“ als Beispiel für Spannungsoptik der Fachhochschule Lübeck

---

<sup>4</sup>Online, [http://www.fh-luebeck.de/content/01\\_34\\_03\\_07/5/13.html](http://www.fh-luebeck.de/content/01_34_03_07/5/13.html), 12. Februar 2006

## 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

### 3.1 Eigenschaften und Verhalten

#### 3.1.1 Ein kleines Experiment mit polarisiertem Licht

Wie in Abb. 1.2 ersichtlich wird polarisiertes Licht von einem Polarisationsfilter, der in einem Winkel von  $90^\circ$  zur Polarisationsrichtung steht, vollkommen ausgelöscht. Was passiert jedoch, wenn der Polarisationsfilter in einem anderen Winkel zur Polarisationsrichtung steht? Das folgende Experiment soll uns das Verhalten veranschaulichen: Wir schicken unpolarisiertes Licht durch einen Polarisationsfilter. Wenn wir jetzt die Intensität jeweils davor ( $I_0$ ) und danach ( $I_1$ ) messen, dann werden wir feststellen, dass Folgendes gilt (sofern man einen sehr exakten Polarisationsfilter zur Verfügung hat):

$$I_1 = \frac{1}{2}I_0$$

Dabei ist es egal, in welche Richtung wir den Polarisationsfilter stellen.(Abbildung3.1)

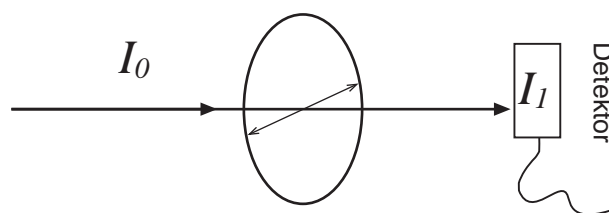


Abbildung 3.1: Intensität vor und nach einem Polarisationsfilter von unpolarisiertem Licht

Wenn wir nun einen zweiten Polarisationsfilter aufstellen, dessen optische Achse um  $45^\circ$

### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

verdreht zum ersten steht, dann wird für die Intensität nach dem zweiten Filter ( $I_2$ ) gelten:

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1$$

bzw. allgemein für einen beliebigen Winkel  $\alpha$  (Abbildung 3.2):

$$I_2 = I_1 \cdot (\cos \alpha)^2$$

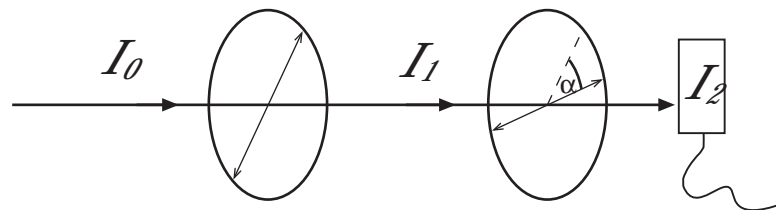


Abbildung 3.2: Intensität vor und nach einem Polarisationsfilter von polarisiertem Licht

Nun stellt sich die Frage, warum  $(\cos \alpha)^2$ ? Das lässt sich leicht anhand von Abbildung 3.3 erklären: Die Schwingung kann mittels Vektoren dargestellt werden. In Abbildung 3.3 hat

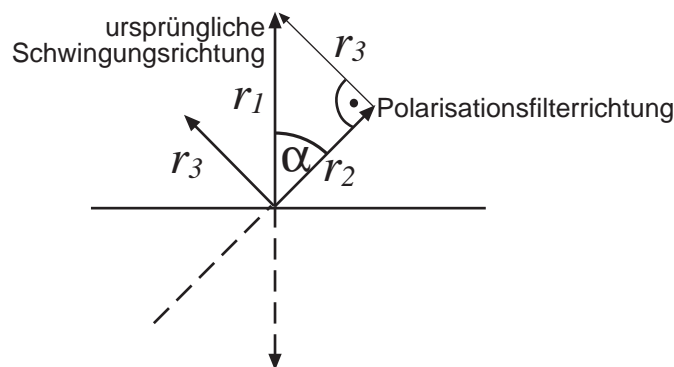


Abbildung 3.3: Der Intensitätsverlust beim Passieren eines Polarisationsfilters

man nun den Vektor ( $\vec{r}_1$ ) der Amplitude eines polarisierten Lichtstrahls, außerdem ist der Winkel  $\alpha$  zwischen der Polarisationsrichtung des Lichtstrahls und des Polarisationsfilters bekannt. Wenn wir jetzt die Schwingung des Lichtstrahls in zwei normal aufeinander stehende Teilschwingungen zerlegen, wobei eine davon ( $\vec{r}_2$ ) die Richtung der optischen Achse des Polarisationsfilters hat, ergibt sich der Zusammenhang

$$\cos \alpha = \frac{r_2}{r_1}$$

### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

bzw. umgeformt:

$$r_2 = r_1 \cdot \cos \alpha$$

Die Intensität eines Lichtstrahls ist, bei geeigneten gewählten Einheiten, gleich der Amplitude zum Quadrat also  $I_1 = r_1^2$  bzw.  $I_2 = r_2^2$  und daraus folgt dann auch, dass  $I_2 = I_1 \cdot (\cos \alpha)^2$  gelten muss.

Jetzt schauen wir weiter bei unserem Experiment und fügen einen dritten Polarisationsfilter hinzu, der wiederum um  $45^\circ$  verdreht zum zweiten steht, dann ergibt sich: (Abbildung 3.4)

$$I_3 = \frac{1}{2} I_2$$

bzw.

$$I_3 = \frac{1}{4} I_1$$

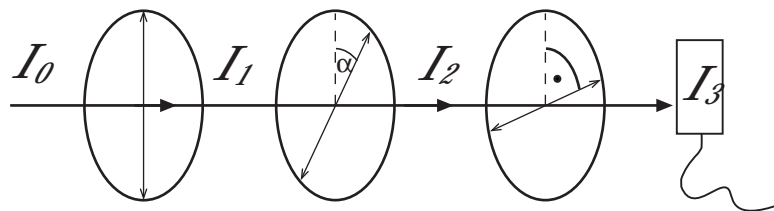


Abbildung 3.4: Die Intensität nach zwei Polarisationsfiltern, die normal aufeinander stehen, ist nicht null, wenn ein Polarisationsfilter mit einem anderen Winkel zwischen den beiden steht.

Daraus ergibt sich ein überraschender Effekt: Wenn man den zweiten Polarisationsfilter entfernt, dann ergibt sich zwischen dem ersten und dem dritten Filter ein Winkel von  $90^\circ$ . Daraus folgt, dass

$$I_3 = I_1 \cdot (\cos 90^\circ)^2 = 0$$

Das heißt, dass vom dritten Filter kein Licht durchgelassen wird und die Intensität null ist, obwohl, wenn der zweite Filter vorhanden ist, ein Viertel von  $I_1$  den dritten Filter passieren kann.

Die Quantenphysik schließt daraus, dass die Photonen, die den zweiten Filter passiert haben, "die Richtung des ersten Filters vollkommen 'vergessen' haben"<sup>1</sup> und daher alle um

<sup>1</sup>Zeilinger, Anton, Grundlagen zur Quantenmechanik: Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon, S. 10

45° zum 3. Filter verdreht sind. Genauer genommen heißt das, dass bei jeder Messung die Polarisationsrichtung neu festgelegt wird und mit dieser auch die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Photon einen folgenden Polarisationsfilter passiert.

#### 3.1.2 Von der Intensität zur Photonenanzahl

Im letzten Kapitel wurde mit der Intensität von Licht gearbeitet, in der Quantenphysik hingegen arbeitet man häufiger mit der Photonenanzahl. Die Photonenanzahl ist proportional der Intensität, das heißt, dass die Photonenanzahl  $N$  eines Lichtstrahles proportional dem Quadrat der Amplitude ( $r$ ) ist. Ebenso ist auch die Wahrscheinlichkeit, mit der ein einzelnes Photon einen Filter passiert, proportional zur Anzahl der Photonen, die den Filter passieren (bei einer großen Anzahl von Photonen). Somit können auch alle Beispiele aus dem vorherigen Kapitel mit der Anzahl der Photonen bzw. mit der Wahrscheinlichkeit anstatt mit der Intensität abgehandelt werden.

#### 3.1.3 Messungen in der Quantenphysik

##### 3.1.3.1 Das Projektionspostulat

Am Ende des Kapitels 3.1.1 haben wir festgestellt, dass ein Photon bzw. ein Lichtstrahl, der einen Polarisationsfilter passiert hat, seine Polarisationsrichtung vor dem Filter „vergessen“ hat. Das zugehörige Prinzip ist das so genannte *Projektionspostulat*. Es besagt, „dass eine quantenmechanische Messung nur bestimmte Resultate haben kann.“<sup>2</sup> Die Messung besteht in unserem Fall darin, dass ein Photon auf einen Polarisationsfilter trifft. Die Resultate bestehen darin, dass das Photon den Polarisationsfilter entweder passiert oder von diesem absorbiert wird. Außerdem ist das Quantensystem nach der Messung in einem Zustand, der durch das jeweilige Messergebnis festgelegt ist. Das Quantensystem ist bei unserem Experiment das Photon und der Zustand die Polarisationsrichtung. Das heißt eine quantenmechanische Messung (wie die der Polarisationsrichtung mit einem Polarisationsfilter) einer Eigenschaft hat eine unmittelbare Auswirkung auf diese Eigenschaft. Die Auswirkung in

---

<sup>2</sup>Kwiat, Paul, Weinfurter, Harald und Zeilinger, Anton, Wechselwirkungsfreie quantenmessung in Spektrum der Wissenschaft Digest - Schrödingers Katze S.26



unserem Experiment ist, dass z.B. ein Photon, welches vor der Messung  $15^\circ$  zum Polarisationsfilter verdreht war, entweder absorbiert wird oder eine parallele Polarisationsrichtung hat. Das steht im Gegensatz zur klassischen Physik, wo man zum Beispiel die Länge einer Strecke messen kann, ohne dass die Länge des Meterstabs eine Auswirkung auf die Länge der Strecke hat. Dies ist jedoch nicht zu vergleichen mit der Beobachtung eines lichtempfindlichen Objekts (zum Beispiel eines alten Bildes), das durch das auftreffende Licht beschädigt oder zerstört wird. Bei quantenmechanischen Messungen ist vor der Messung überhaupt nicht festgelegt, wie die Messung ausgeht. Der Ausgang der Messung ist vollkommen zufällig. Erst nach der Messung hat das Objekt die gemessene Eigenschaft. Dass das so sein muss, kann mittels korrelierter Photonen und der Bellschen Ungleichung gezeigt werden. Das Projektionspostulat wird in den weiteren Kapiteln eine zentrale Rolle spielen, da die Messung genauso wie in der klassischen Physik auch in der Quantenphysik eine zentrale Rolle spielt.

#### 3.1.3.2 Der Quanten-Zenon-Effekt

Der Quanten-Zenon-Effekt ist ein gutes Beispiel für die Auswirkung von Messungen von polarisierten Photonen. Der griechische Philosoph Zenon formulierte das weitum bekannte „Paradoxon von Achilles und der Schildkröte“ oder, und das trifft in unserem Fall besser zu, das Paradoxon mit dem Pfeil: Wenn ein Pfeil weggeschossen wird, dann kann man die Strecke, welche der Pfeil zurücklegt, unterteilen. Man kann zuerst den ersten Millimeter anschauen und darauf einen Punkt setzen, den der Pfeil passieren muss. Nun kann man diesen Millimeter wieder unterteilen und einen Punkt festlegen, welchen der Pfeil passieren muss. Dieses Spiel des Unterteilens kann man unendlich lange fortführen. Zenon meinte nun, dass der Pfeil unendlich viele Punkte passieren müsse und daher nie weiterkommen könne. Die Infinitesimalrechnung ermöglicht die Auflösung von Zenons Paradoxon. Wir beschäftigen uns jetzt mit einem Zenon-Effekt, welcher keine Paradoxie ist. Die Bezeichnung Zenon-Effekt, welche in der Quantenphysik verwendet wird, scheint nicht ganz eindeutig zu sein. Daher werde ich die Literatur zitieren, in welcher das Beispiel publiziert wurde. Jürgen Audretsch beschreibt den Quanten-Zenon-Effekt folgendermaßen: „Durch wiederholte Messung an einem Quantensystem kann seine dynamische Entwicklung (...) vollständig unterbunden werden. Das Quantensystem wird in seinem Anfangszustand ‚eingefroren‘.“<sup>3</sup> Das Einfrieren eines Quantensystems, welches sonst einer dynamischen Veränderung unterliegen

<sup>3</sup>Audretsch, Jürgen, Verschränkte Welt, S.19

### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

würde (wie z.B.: das Zerfallen von radioaktiven Atomen oder die Drehung der Polarisationsrichtung), ist die Parallele zum klassischen Zenon Effekt, bei dem sich der Pfeil, durch das ständige „Messen“ bzw. Unterteilen der Strecke, nicht fortbewegen können sollte.

Die Anwendung bzw. das Auftreten des Quanten Zenon Effekts ist sehr vielfältig. Ich möchte ihn hier an einem Beispiel mit polarisierten Photonen von Anton Zeilinger<sup>4</sup> vorstellen, da es sehr einfach ist und auch eine Rolle bei der wechselwirkungsfreien Quantenmessung spielt.

Der Versuchsaufbau ist sehr einfach: Man stellt sechs Polarisationsrotatoren in eine Reihe und am Ende einen horizontalen Polarisationsfilter. Dann schickt man horizontal polarisierte Photonen durch diesen Versuchsaufbau, an dessen Ende ein Detektor platziert wurde, der misst, wie viele der polarisierten Photonen den Versuchsaufbau durchlaufen haben. Die Polarisationsrotatoren sind optisch aktive Substanzen, welche die Polarisationsrichtung der Photonen jeweils um  $15^\circ$  verdrehen. Das horizontal polarisierte Licht wird durch die sechs Polarisationsrotatoren also um insgesamt  $90^\circ$  verdreht und daher passiert kein Photon den horizontalen Polarisationsfilter bzw. die Wahrscheinlichkeit dafür ist null. (Siehe Abbildung 3.5).

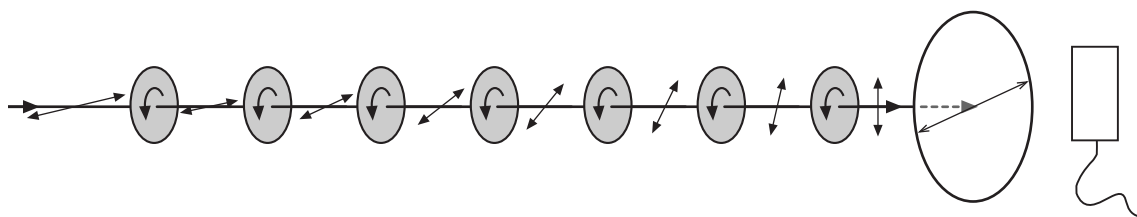


Abbildung 3.5: Die Drehung von polarisiertem Licht durch Polarisationsrotatoren

Die Polarisationsrotatoren bewirken die von Audretsch als „Dynamische Entwicklung“<sup>5</sup> bezeichnete Zustandsveränderung. Nun fügen wir hinter jeden Polarisationsrotator einen horizontalen Polarisationsfilter (Abbildung 3.6). Das hat zur Folge, dass die um  $15^\circ$  verdrehten Photonen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,93 den folgenden Polarisationsfilter passieren (nach dem Gesetz  $N_2 = N_1 \cdot (\cos \alpha)^2$ ). Wenn das Photon den Filter passiert hat, dann ist es nach dem Projektionspostulat wieder horizontal polarisiert. Dann geht es zum nächsten Polarisationsrotator usw. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon alle 6 Polarisationsfilter

<sup>4</sup>Kwiat, Paul „Wechselwirkungsfreie Quantenmessung“, *Spektrum der Wissenschaft - Digest* (1999) Nr.1, S.23

<sup>5</sup>Audretsch, Jürgen, *Verschränkte Welt*, S.19

### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

passiert und vom Detektor registriert wird, ist ca. zwei Drittel  $(\cos^2 15^\circ)^6$  im Gegensatz zur vorherigen Versuchsanordnung ohne die Polarisationsfilter, wo die Wahrscheinlichkeit null war. Das heißt durch die *Messung* der Polarisationsrichtung mittels der Polarisationsfilter wird der Zustand der Photonen beeinflusst (wie im Projektionspostulat beschrieben) und immer wieder an den Anfangszustand zurückgesetzt bzw. im Anfangszustand eingefroren.

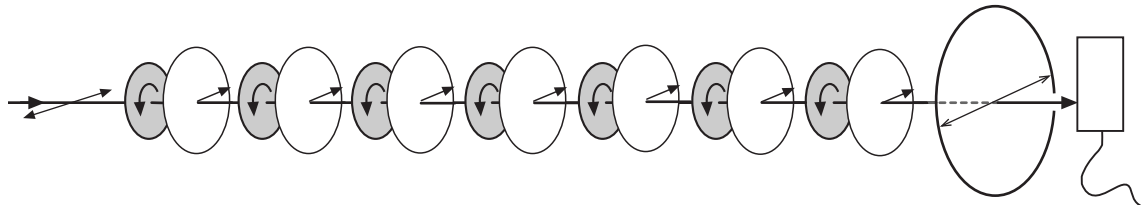


Abbildung 3.6: Die Drehung wird durch Messen verhindert, der Quanten-Zenon-Effekt

Ein anderes Beispiel für die Auswirkung von Quantenmessung ist die Drehung der Polarisationsrichtung durch Messung. Wenn man nun, wie im Kapitel 3.1.1 gezeigt, mehrere zueinander verdrehte Polarisationsfilter in einer Reihe aufstellt, dann kann man die Polarisationsrichtung eines Lichtstrahls drehen. Jedoch gehen dabei bei jedem Polarisationsfilter Photonen (bzw. Intensität) verloren. Aber je mehr Polarisationsfilter man hintereinander fügt und je kleiner man die Winkel zwischen den Filtern macht, desto geringer wird der Intensitätsverlust. Wenn man nun den Grenzwert annimmt, dass die Anzahl der Polarisationsfilter, die jeweils nur um einen infinitesimalen Winkel verdreht sind, gegen unendlich geht, dann geht der Verlust zwischen jedem Filter gegen null. Somit kann die Polarisationsrichtung durch kontinuierliches Messen verlustfrei gedreht werden.

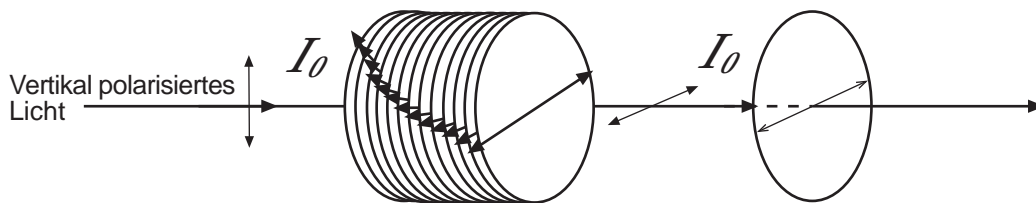


Abbildung 3.7: Verlustfreie Drehung der Polarisationsrichtung ohne Intensitätsverlust, durch ständiges Messen

Um noch einmal das Überraschende an der quantenmechanischen Messung zu betonen: Durch das Messen wird die Eigenschaft eines Quantenobjekts festgelegt, wobei nur bestimmte Resultate möglich sind. Weiters ist das Resultat vor der Messung überhaupt nicht bestimmt (Siehe Kapitel über die Bellsche Ungleichung) und daher vollkommen zufällig. Im

Gegensatz zur klassischen Physik, wo eine *bestehende* Eigenschaft das Resultat der Messung bestimmt.

## 3.2 Korrelierte Photonen

*Korrelierte* bzw. *verschränkte* Teilchen sind 2 oder mehr Teilchen, die zum Beispiel über eine Eigenschaft (z.B.: die Polarisation) miteinander „verschränkt“ sind. Solche verschränkten oder korrelierten Teilchen haben die Eigenschaft, dass eine Messung der Eigenschaft an dem einen Teilchen dieselbe Eigenschaft am anderen Teilchen festlegt.

Das wollen wir nun anhand eines konkreten Experiments mit einem korrelierten Photonenpaar anschauen, welches von A. Aspect und Mitarbeitern 1982 in Orsay durchgeführt wurde.<sup>6</sup> Im Experiment (Abbildung 3.8) gibt es eine Photonenquelle, die wie folgt funktioniert: „Geeignet angeregte Kalziumatome gehen in einer Kaskade von zwei Schritten in den Grundzustand über. (...) Es wird dabei ein verschränktes Photonenpaar (Gesamtsystem) emittiert.“<sup>7</sup> Die einzelnen Photonen fliegen in entgegengesetzte Richtung auseinander und treffen dann auf zwei in eine beliebige Richtung parallel gerichtete Polarisationsfilter. Wenn nun das eine Photon (*a*) den einen Polarisationsfilter passiert, passiert auch das andere Photon (*b*) den anderen parallel gerichteten Polarisationsfilter. Wenn *a* seinen Polarisationsfilter nicht passiert, dann gilt das selbe für *b*. (In der Praxis sind die Photonen meistens entgegengesetzt polarisiert, das wird hier jedoch der Einfachheit wegen vernachlässigt, wie in der Literatur üblich.)

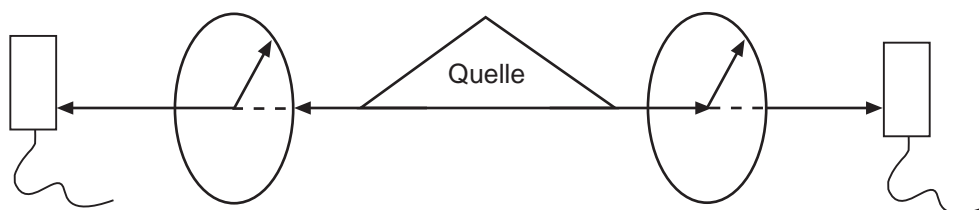


Abbildung 3.8: Korrelierte Photonen

Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Photonen die Polarisationsfilter passieren, ist wie

<sup>6</sup>Zeilinger, Anton, Grundlagen zur Quantenmechanik: Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon, S.10

<sup>7</sup>Audretsch, Jürgen, Verschränkte Welt, S.40

### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

bei Experimenten mit einem Photon und einem Polarisationsfilter 50%, egal in welche Richtung die zwei Polarisationsfilter gedreht werden.

Nun bauen wir das Experiment mit zwei entgegengesetzten Polarisationsfiltern auf. Hier gilt dann, dass entweder das Photon *a* (mit 50% Wahrscheinlichkeit) oder das Photon *b* (mit 50% Wahrscheinlichkeit) den jeweiligen Polarisationsfilter passiert, aber nie beide.

Wenn man das Verhalten feststellt, dann wird man erst einmal denken, dass die Photonen bei ihrer Entstehung eine zufällige jedoch gleiche Polarisationsrichtung bekommen und daher auch beide Photonen zusammen die parallel gerichteten Polarisationsfilter immer entweder passieren oder nicht. Jedoch aus der Quantenphysik ergibt sich, dass die Photonen bis zur Messung keine Polarisationsrichtung haben. Erst die *Messung* an einem Photon legt die Polarisationsrichtungen beider Photonen fest. Das heißt, erst wenn das Photon „a“ von einem Polarisationsfilter gemessen wird (also durchgeht oder nicht durchgeht), ist die Polarisationsrichtung der beiden Photonen, also auch von „b“, festgelegt. Vorher haben sie nach der Quantenphysik keine Polarisationsrichtung. Das heißt die Messung am Ort A bewirkt die Festlegung der Polarisationsrichtung vom Photon „b“ am Ort B. Dass das so ist bzw. wie man es beweisen kann, das werden wir im Kapitel 3.3.2 über die Bellsche Ungleichung untersuchen.

Diese Fernwirkung durch die Messung und vor allem das „Nichtvorhandensein“ der Polarisationsrichtung bzw. einer Eigenschaft ist wie vieles in der Quantenphysik mit unserem Erfahrungshorizont und unseren Alltagsvorstellungen nicht direkt zu begreifen. Auch Einstein lehnte diese „spukhafte Fernwirkung“ ab. Er meinte, dass es noch *verborgene Variablen* geben müsse, welche die Quantenphysik nicht behandle. Durch diese verborgenen Variablen soll von der Entstehung der Photonen an festgelegt sein, bei welchen Polarisationsfilterstellungen ein Photon durchgeht und bei welchen nicht. Er glaubte daher, dass die Quantenphysik unvollständig sein müsse.<sup>8</sup> Das würde auch der Hausverstand sagen.

Sind also die Zustände der Photonen erst nach der Messung festgelegt? Oder gibt es noch irgendwelche „verborgenen Variablen“, die sie miteinander verknüpfen? Oder tauschen sie Informationen auch noch nach ihrer Entstehung aus? Diese Fragen wurden bei Diskussionen der Quantenphysik häufig gestellt. Unter anderem haben Einstein, Podolsky und Rosen (EPR)

---

<sup>8</sup>siehe Held, Carsten, Die Bohr-Einstein-Debatte und das Grundproblem der Quantenmechanik in Jürgen Audretsch, Verschränkte Welt, S.68ff

gemeinsam einen Aufsatz<sup>9</sup> veröffentlicht, in welchem sie die Vollständigkeit der Quantenphysik in Frage stellten.

### 3.3 Das Ende der Lokalität und der Realität

#### 3.3.1 Das EPR Paradoxon in Anwendung auf polarisierte Photonen

Mit der EPR Arbeit versuchten Einstein, Podolsky und Rosen zu zeigen, dass die Quantenphysik unvollständig sein müsse. Eine Übertragung des EPR Experiments auf verschränkte Photonen ist das so genannte „EPR-Bohm-Experiment“<sup>10</sup> und dieses will ich nun genauer erläutern: EPR sagen: „Wenn ich eine Eigenschaft eines Objekts sicher vorhersagen (indirekt messen) kann, ohne das Objekt zu beeinflussen, dann hat das Objekt diese Eigenschaft.“<sup>11</sup> Übertragen auf über die Polarisation verschränkten Photonen heißt das, sobald ich die Polarisationsrichtung von Photon „a“ weiß (bzw. gemessen habe) und daher auch das Messergebnis (der Polarisationsrichtung) an Photon „b“ vorhersagen kann, kann ich davon ausgehen, dass Photon „b“ die gleiche Eigenschaft wie Photon „a“ hat. Einstein geht weiters davon aus, dass die Messung von Photon „a“ nicht auf das Photon „b“ wirken kann. Das erscheint recht verständlich, da ja die Photonen bei den Experimenten zum Zeitpunkt der Messung beliebig weit auseinander sein können und die Relativitätstheorie von Einstein besagt, dass sich keine Energie oder Information schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann. Einstein also schließt eine „spukhafte Fernwirkung“, wie er sie nannte, aus.

Einstein besteht mit anderen Worten auf dem Lokalitätsprinzip und auf dem Realitätsprinzip. Das *Lokalitätsprinzip* besagt: „Die räumlich getrennten Quantenobjekte besitzen alle ihre Eigenschaften unabhängig voneinander.“<sup>12</sup> Das heißt, dass eine Messung einer Eigenschaft an einem Teilchen nicht die Messung an einem anderen Teilchen beeinflussen kann, welches beliebig weit entfernt sein kann. Das Lokalitätsprinzip ist in unserer Alltagsumgebung durch

---

<sup>9</sup>s.o.

<sup>10</sup>Held, Carsten, Die Bohr-Einstein-Debatte und das Grundproblem der Quantenmechanik in Jürgen Audretsch, Verschränkte Welt, S.69

<sup>11</sup>Held, Carsten, Die Bohr-Einstein-Debatte und das Grundproblem der Quantenmechanik in Jürgen Audretsch, Verschränkte Welt, S.70

<sup>12</sup>Audretsch, Jürgen, Verschränkte Welt, S.43

und durch gültig. Als Beispiel können wir uns vorstellen, dass wir eine Maschine haben, die auf Knopfdruck zwei Kugelschreiber ausgibt, die entweder schwarz oder rot schreiben, jedoch pro Paar immer die selbe Farbe. Wir stellen weiters fest, dass beide Kugelschreiber sowohl schwarze als auch rote Farbe enthalten, sich aber immer für die selbe entscheiden. Diese Entscheidung geschieht über einen Kommunikationsweg, zum Beispiel über eine Funkverbindung. Wenn man nun die zwei Kugelschreiber weit voneinander entfernt testet und die Kommunikationsmöglichkeit nicht vorhanden ist, dann wird die Auswahl der Farbe des einen Kugelschreibers unabhängig von der des anderen Kugelschreibers ausfallen.

Das *Realitätsprinzip* besagt, dass der Ausgang einer Messung im Vorhinein durch die Eigenschaften des Messobjekts bereits fest gelegt ist. Auch das Realitätsprinzip ist bei unseren alltäglichen Beobachtungen gegeben. Immer wenn wir etwas beobachten, dann stellen wir etwas fest, das im Vorhinein schon irgendwie festgelegt wurde. Zum Beispiel ist die Sonne da, auch wenn wir nicht hinsehen. Oder ein Kugelschreiber enthält rote Tinte, auch bevor wir ihn ausprobieren und sehen, dass er rot schreibt.

Einstein sagt, dass es „verborgene Variablen“ geben müsse, welche schon vor der Messung festlegen, bei welchen Filterstellungen ein Photon durchgeht und bei welchen nicht, damit das Lokalitätsprinzip und das Realitätsprinzip gehalten werden können. Die Quantenphysik jedoch ergibt, dass die Prinzipien der Realität und der Lokalität nicht gültig sind. Daraus folgt, dass die Polarisationsrichtung erst durch eine Messung festgelegt wird. Das heißt, dass erst, wenn Photon „a“ gemessen wird, die Eigenschaften von beiden Photonen „a“ und „b“ festgelegt sind. Daraus folgt wiederum, dass durch die Messung am Ort A von Photon „a“ die Eigenschaft des Photon „b“ an einem Ort B festgelegt wird. Einstein lehnte bis an sein Lebensende ab, dass das Lokalitätsprinzip nicht gültig ist. Zu dieser Zeit war es auch unvorstellbar, dass es Experimente geben könnte, welche entscheiden, ob es verborgene Variablen gibt oder nicht.

#### **3.3.2 Die Bellsche Ungleichung**

Umso überraschender war es, als John Stewart Bell 1964 die Bellsche Ungleichung entwickelte, die es möglich machte, die Frage der Vollständigkeit der Quantenphysik in diesem Bereich zu klären. Ich möchte hier eine vereinfachte Variante der Bellschen Ungleichung vorstellen. Dazu nehmen wir wieder unsere zwei korrelierten Photonen „a“ und „b“, die in

### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

entgegengesetzte Richtung ausgesandt werden, um dann zu jeweils einem Polarisationsfilter zu kommen, bei denen dann gemessen wird, ob sie den Filter passieren oder nicht.

Jetzt legen wir noch fest, dass die zwei Polarisationsfilter drei verschiedene Stellungen ( $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ ) haben können und diese beliebig miteinander kombiniert werden können.

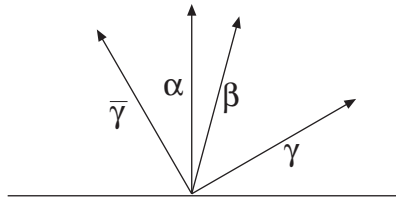


Abbildung 3.9: Die drei Winkel werden für die Beweisführung von Bell benötigt

$\bar{\gamma}$	Komplementärwinkel zu $\gamma$
$N_{(\alpha,\beta)}$	Zahl der Photonen die bei $\alpha$ und $\beta$ den Polarisationsfilter passieren
$M_{(\alpha,\beta)}$	Menge der Photonen die bei $\alpha$ und $\beta$ den Polarisationsfilter passieren

Tabelle 3.1: Definition der Bezeichnungen, die hier verwendet werden

Bell geht wie Einstein davon aus, dass bei der Entstehung der Photonen durch verborgene Variablen festgelegt wird, bei welchen Stellungen eines Polarisationsfilters ein Photon durchgeht, oder anders gesagt, dass das Realitätsprinzip gültig ist. Auf Grund dieser Hypothese schließt er Folgendes:

Die Zahl der Photonen, die bei der Stellung  $\alpha$  und bei der Stellung  $\beta$  durchgehen (=  $N_{(\alpha,\beta)}$ ),

#### **ist kleiner oder gleich**

der Zahl der Photonen, die bei den Stellungen  $\alpha$  und  $\gamma$  durchgehen (=  $N_{(\alpha,\gamma)}$ )

#### **plus**

der Zahl der Photonen, welche bei der Stellung  $\beta$ , aber nicht bei der Stellung  $\gamma$  durchgehen (=  $N_{(\beta,\bar{\gamma})}$ ) (siehe Tabelle 3.2). Diese Form der Bellschen Ungleichung wird auch im Folgenden verwendet:

$$N_{(\alpha,\beta)} \leq N_{(\alpha,\gamma)} + N_{(\beta,\bar{\gamma})}$$



### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

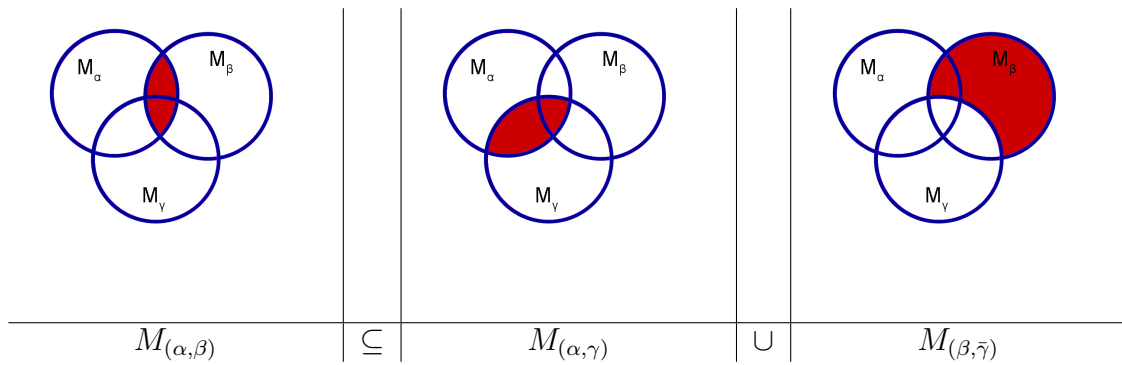


Tabelle 3.2: Bellsche Ungleichung

Dieser Zusammenhang lässt sich leichter an Tabelle 3.2 erkennen. Jeder Kreis in der Tabelle stellt die Menge der Photonen dar, die einen Polarisationsfilter bei einem bestimmten Winkel passieren. Da durch das Realitätsprinzip bei den Photonen schon vor dem Messen festgelegt sein muss, bei welcher Filterstellung sie durchgehen und bei welcher nicht, muss es möglich sein eine Menge zu bilden, die bei einem bestimmten Winkel durchgeht. Die Schnittflächen stellen die Mengen der Photonen dar, die bei beiden Winkeln durchgehen. Aus der Tabelle 3.2 ergibt sich, dass  $M_{(\alpha,\beta)} \subseteq M_{(\alpha,\gamma)} \cup M_{(\beta,\bar{\gamma})}$  und daher  $N_{(\alpha,\beta)} \leq N_{(\alpha,\gamma)} + N_{(\beta,\bar{\gamma})}$ .

Nun schreiten wir zur Tat: Mit Hilfe der Wellentheorie des Lichtes und auch aus der Quantenphysik ergibt sich Folgendes (Siehe Kap. 3.1.1):

$$\begin{aligned} N_{(\alpha,\beta)} &= N_p \cos^2(\beta - \alpha) \\ N_{(\alpha,\gamma)} &= N_p \cos^2(\gamma - \alpha) \\ N_{(\beta,\bar{\gamma})} &= N_p \cos^2(90 - (\gamma - \beta)) \end{aligned}$$

Wobei  $N_p$  die Zahl der Photonenpaare ist, die die Polarisationsfilter bei paralleler Anordnung passieren. Diese Aussagen gelten auch für korrelierte Photonen. Das heißt, wenn man bei korrelierten Photonen mit den Polarisationsfilterstellungen  $\alpha$  und  $\beta$  jeweils einen Teil des Photonenpaars misst, dann passieren  $N_p \cos^2(\beta - \alpha)$  Photonenpaare auf beiden Seiten die Filter. Dies wurde experimentell bestätigt und kann somit als gültig angesehen werden.

Wenn man nun  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$  und  $\gamma = 60^\circ$  in diese Formeln einsetzt und daraus die Bellsche Ungleichung bildet, ergibt sich Folgendes ( $N_p$  kann hier weggelassen werden, da

es nie negativ werden kann):

$$\cos^2(30) \leq \cos^2(60) + \cos^2(60) \Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow 0,75 \leq 0,5 \Rightarrow \text{falsche Aussage}$$

Warum ergibt sich hier nun eine falsche Aussage? Der Grund dafür liegt darin, dass es nicht möglich ist, die Photonen in Mengen einzuteilen, wie wir es in Tabelle 3.2 getan haben. Das heißt, dass es vor der Messung keine Menge der Photonen geben kann, für die festgelegt ist, dass sie bei  $0^\circ$  und bei  $30^\circ$  die Filter passieren. Warum diese Einteilung nicht möglich ist und wie das in der Quantenphysik gedeutet wird, werden wir nun analysieren.

#### 3.3.3 Die Folgen

Noch einmal zusammenfassend: Bell hat diese Gleichung aufgrund der Annahme aufgestellt, dass die Prinzipien der Realität und der Lokalität immer gültig sind. Das Prinzip der Realität bedeutet, dass jeder messbare Zustand schon vor der Messung festgelegt ist. Das Lokalitätsprinzip bedeutet, dass die Messung einer Eigenschaft an einem Teilchen nicht die Messung an einem anderen entfernten Teilchen beeinflussen kann. Für die Verletzung der Bellschen Ungleichung wird nur der experimentelle Beweis des Gesetzes  $N_{(\alpha,\beta)} = N_p \cos^2(\beta - \alpha)$  benötigt.

Dass das Gesetz  $N_{(\alpha,\beta)} = N_p \cos^2(\beta - \alpha)$  gültig ist, wurde experimentell bestätigt. Es kann also nur die Annahme der Gültigkeit des Realitätsprinzips oder des Lokalitätsprinzips falsch sein. Es ist daher eine lokale und realistische Theorie nicht möglich. Denn wenn das Realitätsprinzip und das Lokalitätsprinzip gültig wären, dann müsste es möglich sein Mengen (wie sie in Tabelle 3.2 dargestellt sind) zu bilden, für welche die Bellsche Ungleichung gültig ist. Zumindest eines der zwei Prinzipien muss aufgegeben werden, um die Verletzung der Bellschen Ungleichung zu erklären. Die Quantenphysik gibt beide Prinzipien auf. Weshalb sich eine Theorie, welche beide Prinzipien aufgegeben hat, besser durchsetzen konnte, als eine Theorie, die nur eines der beiden aufgibt, werden wir uns im nächsten Kapitel kurz überlegen. Doch vorerst stellen wir die Frage: Was bedeutet die Aufgabe des Realitätsprinzips und des Lokalitätsprinzips?

Die Aufgabe des *Realitätsprinzips* bedeutet für die korrelierten Photonen, dass sie die In-

### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

formation, bei welcher Filterstellung sie durchgehen und bei welcher nicht, nicht schon bei ihrer Entstehung bekommen können (zum Beispiel durch verborgene Variablen), sondern dass erst bei der Messung die Polarisationsrichtung zufällig festgelegt wird und somit auch, ob sie den Filter passieren oder nicht.

Die Aufgabe des *Lokalitätsprinzips* bedeutet, dass eine Messung an einem Ort eine Messung an einem anderen Ort Zeitgleich festlegen kann (als ob die örtliche Trennung nicht gegeben wäre). Diese von Einstein so kritisierte spukhafte Fernwirkung bedeutet weiters, dass bei einer gleichzeitigen Messung an den Orten A und B, Ursache und Wirkung vertauschbar sind.

Die Quantenphysik gibt sowohl die Realität als auch die Lokalität auf. Es ist daher möglich, dass jedes korrelierte Photonenpaar ein einzelnes System bildet, wie es in der Quantenphysik bezeichnet wird. Dieses System kann auf zwei Orte aufgeteilt sein und seine Eigenschaften müssen vor der Messung nicht festgelegt sein. Wenn man an einem Ort eine Eigenschaft misst, dann wird sofort die Eigenschaft am anderen Ort auch festgelegt, egal wie weit die zwei Orte voneinander entfernt sind. Aus den Aussagen der Quantenphysik folgt also, wie im Kapitel 3.2 vorweggenommen, dass erst durch die Messung des Photon „a“ am Ort A das Ergebnis der Messung des Photon „b“ am Ort B festgelegt wird.

Der Zustand der korrelierten Photonen wie ihn die Quantenphysik beschreibt, kann mit Worten nur sehr bedingt dargestellt werden. Um uns klar zu werden, was die Aufgabe des Realitätsprinzips und des Lokalitätsprinzips in unserer Alltagsumgebung bedeuten würde, nehmen wir uns noch einmal unsere Kugelschreiber zu Hilfe. Unsere Maschine spuckt also immer auf Knopfdruck zwei Kugelschreiber aus, von denen wir feststellen, dass beide immer mit der gleichen Farbe schreiben (entweder rot oder schwarz). Weiters stellen wir jetzt fest, dass es egal ist, wie weit sie voneinander entfernt sind und ob eine Kommunikationsmöglichkeit besteht oder nicht, wenn sie das erste mal getestet werden. Sie schreiben also unter allen Umständen mit der gleichen Farbe. Nun untersucht man, ob die Farbe, mit der sie schreiben, von der Maschine, aus der sie stammen, festgelegt wurde. Wir können jedoch nichts entdecken. Ganz im Gegenteil, man findet sogar ein Experiment, welches ausschließt, dass die Farbe, mit der sie schreiben, festgelegt ist, bevor man einen Kugelschreiber austestet. Diese Kugelschreiber würden in der Quantenphysik als korreliert bezeichnet werden. Ein solches Phänomen gibt es in unserer Alltagsumgebung nicht. Bei einem Verhalten, wie es unsere Kugelschreiber an den Tag legen, muss die Farbe entweder gleich in der Maschine festgelegt werden oder es muss eine Kommunikationsmöglichkeit

bei der Messung bestehen. In der Quantenphysik wird jedoch beides ausgeschlossen und damit auch das Realitätsprinzip und das Lokalitätsprinzip als für den Quantenmechanischen Bereich ungültig erklärt. Die Quantenphysik sieht zwei korrelierte Photonen als ein einziges System an, welches erst durch die Messung in zwei Teile zerfällt, wobei das System nicht an die Lokalität gebunden ist.

Jetzt ist auch die im Kapitel 3.1.3 über die Messung in der Quantenphysik offen gelassene Frage, weshalb der Ausgang der Messung vor der Messung nicht festgelegt sein kann, bzw. weshalb das Resultat einer Messung vollkommen zufällig ist, beantwortet. Um die Aussagen der Quantenphysik nocheinmal zusammenzufassen: Die Quantenphysik sagt, dass der Ausgang einer Messung vor der tatsächlichen Messung nicht festgelegt ist. Da es nicht festgelegt ist, gibt es auch keinen Grund, weshalb sich ein Photon bei der Messung für die eine oder andere Polarisationsrichtung entscheidet und der Ausgang der Messung ist daher rein zufällig. Die Quantenphysik ist nicht lokal und es gibt daher Systeme, von denen ein einzelnes an zwei (oder mehr) räumlich getrennten Orten zur gleichen Zeit gemessen werden kann und dabei zwei zusammenhängende Messergebnisse liefert.

#### **3.3.4 Ein letzter „Rettungsversuch“**

Das letzte Kapitel hat beschrieben, welche eigenwillige „Weltansicht“ die Quantenphysik mit sich bringt. Natürlich stößt eine so unfassbare Theorie auf starke Widerstände und die Quantenphysik ist nicht die einzige Antwort auf die Verletzung der Bellschen Ungleichung. Einige Argumente und Versuche die Ansicht der Quantenphysik zu widerlegen möchte ich jetzt vorstellen.

Eine Vermutung, die bei der Beschäftigung mit dem Experiment sehr schnell aufkommt, ist, dass die Stellung der Messinstrumente (Polarisationsfilter) die Eigenschaften der Photonen beeinflusst. Dieser Annahme stellte jedoch Aspect ein Experiment entgegen<sup>13</sup>, bei welchem er für jedes der zwei Photonen zwei Filter mit unterschiedlicher Stellung bereithält und zwischen diesen so schnell hin und her schaltet, dass der messende Filter erst ausgewählt wird, wenn die Photonen schon unterwegs sind. Somit ist ausgeschlossen, dass die Stellung der Messinstrumente eine Auswirkung auf die Eigenschaften der Photonen haben kann.

---

<sup>13</sup>Zeilinger, Anton, Grundlagen zur Quantenmechanik: Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon, S.22

Bohm hat auch noch eine Alternative zur heutigen Quantentheorie entwickelt, welche zwar realistisch, aber nicht lokal ist.<sup>14</sup> Diese Theorie sagt zwar auch die Verletzung der Bellschen Ungleichung voraus, jedoch ist für die Wahrung des Realitätsprinzips eine Informationsübertragung mit Überlichtgeschwindigkeit nötig. Dadurch findet für geeignet gewählte Beobachter das verursachende Ereignis erst nach der festgestellten Wirkung statt. Vor allem wegen dieser Unannehmlichkeit konnte sie sich nicht gegen die Quantenphysik behaupten.

Ein kleiner Schwachpunkt des Experiments zur Verletzung der Bellschen Ungleichung ist noch, dass diese auf statistischen Untersuchungen beruht. Man könnte daher behaupten, dass die Verletzung der Bellschen Ungleichung bis jetzt immer durch Zufall gelungen ist oder völlig andere Ursachen habe. Jedoch schreibt Harald Winfulter "Diese Verletzung der Ungleichung wurde experimentell bereits oft beobachtet, und wenn auch noch immer ein letztes Schlupfloch offen ist, wären schon neue wenig, plausible Mechanismen notwendig, um die gleichzeitige Annahme von Lokalität und Realität zu rechtfertigen."<sup>15</sup>

Als Trost für alle, die jetzt vollkommen aus der Bahn geworfen sind, muss man noch darauf hinweisen, dass durch korrelierte Photonen weder Information noch Energie mit Überlichtgeschwindigkeit übertragen werden kann, wie es oft fälschlicher Weise angenommen wird. Das heißt, die Quantenphysik steht in keinem Widerspruch zur Relativitätstheorie.

## 3.4 Quantenkryptographie <sup>16</sup>

Die Quantenkryptographie ist eine Möglichkeit, einen Schlüssel abhörsicher zu übertragen. Sie basiert darauf, dass eine quantenmechanische Messung durch einen Spion Auswirkungen auf den Zustand der Photonen hat. Als Zustand, der die Information überträgt, werden in der Praxis polarisierte Photonen verwendet. In der Beschreibung verwende ich die üblichen Bezeichnungen der Beteiligten: Alice und Bob für die Kommunikationspartner und Eve für eine Lauscherin, welche die Kommunikation abhören möchte.

Zunächst schauen wir uns einmal den Aufbau des Experiments an. Alice besitzt eine Pho-

---

<sup>14</sup>Görnitz, Thomas, Quanten sind anders: Die verborgene Einheit der Welt, S.115

<sup>15</sup>Weinfulter, Harald, „Verschränkte Quantensysteme: Vom Welle-Teilchen-Dualismus zur Einzel-Photonen-Lichtquelle“ Audretsch, Jürgen *Verschränkte Welt*, S.96

<sup>16</sup>nach Weinfulter, Harald „Auf dem Weg zur Quanteninformatik“ Audretsch, Jürgen, *Verschränkte Welt*, S.126

### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

tonenquelle, welche Photonen mit der Polarisationsrichtung 0, 45, 90 oder 135 Grad in zufälliger Reihenfolge aussendet. Diese Photonen werden über einen Quantenkanal (zum Beispiel ein Glasfaserkabel) zu Bob gesendet. Bob analysiert die Photonen nun mit einem in Kapitel 2.2 beschriebenen doppelbrechenden Körper.

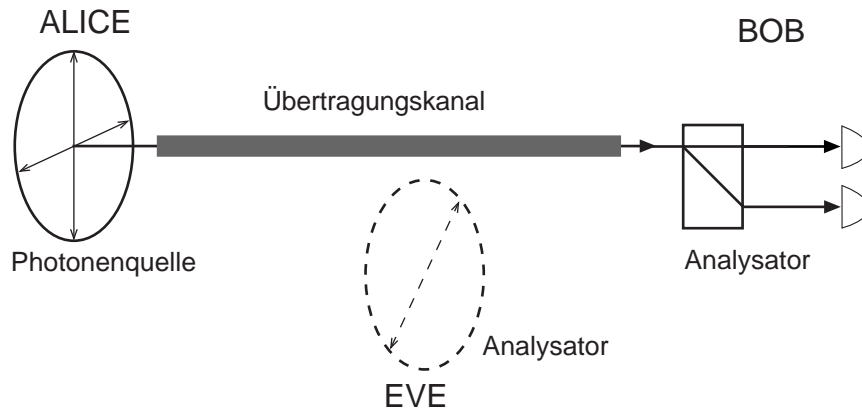


Abbildung 3.10: Möglicher Aufbau, zum Übertragen eines Schlüssels, mithilfe von Quantenkryptographie

Diesen richtet er zufällig entweder gerade (0 Grad) oder schräg (45 Grad). Wenn er ihn gerade richtet, dann kann er nur die Polarisationsrichtung der vertikal oder horizontal (bzw. 90 oder 0 Grad) polarisierten Photonen messen, wenn er ihn schräg richtet, kann er nur die schrägen Photonen messen. Wenn er ein schräges Photon mit einem gerade gerichteten Analysator misst, dann ist die Messung unbrauchbar, da das Photon zu 50% horizontal und zu 50% vertikal gemessen wird. Damit die Photonen mit „falscher“ Messung herausgefiltert werden können, sendet Bob die Information, mit welcher Stellung er welches Photon gemessen hat, über einen öffentlichen Kanal zu Alice. Alice sendet dann die Information, welche von Bobs Messungen „richtig“ waren, zu Bob. Die „falschen“ Messungen werden im Weiteren außer Acht gelassen.

Um nun zu kontrollieren, ob die Übertragung abgehört wurde oder nicht, können jetzt einige Messungen über einen öffentlichen Kanal verglichen werden. Bedingt dadurch, dass jede quantenmechanische Messung eine Auswirkung auf die gemessene Eigenschaft hat, wird ein Lauscher so leicht enttarnt. Zum Beispiel wenn Alice ein horizontal polarisiertes Photon gesendet und Eve mit einer schrägen Stellung des Messinstruments gemessen hat, dann misst Bob das Photon zu 50% vertikal. Bei ausreichender Anzahl an Vergleichen wird Eve mit extrem hoher Wahrscheinlichkeit entlarvt. Die verglichenen Photonen können jedoch dann nicht mehr weiterverwendet werden. Wenn nun festgestellt wurde, dass kein Lauscher

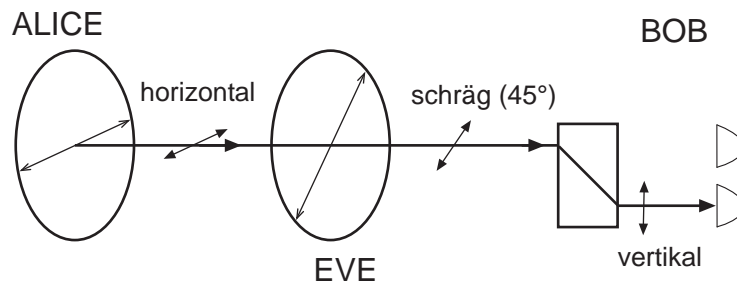


Abbildung 3.11: Durch das Abhören von Eve, bekommen Alice und Bob entgegengesetzte Ergebnisse.

mitgehört hat, dann können die übertragenen Informationen als Schlüssel für das Verschlüsseln von Daten verwendet werden, welche über einen öffentlichen Kanal ausgetauscht werden.

Diese relativ einfache Methode ist in der Praxis schon sehr sicher, jedoch könnte theoretisch immer mit einer geringen Wahrscheinlichkeit Eve unentdeckt bleiben. Eine andere Möglichkeit ist, dass man zur Übertragung korrelierte Photonen verwendet. Es wird dabei je ein Teil eines korrelierten Photonenpaares zu Bob und ein Teil zu Alice gesendet. Beide bekommen dadurch den gleichen Schlüssel. Gemessen wird dabei genauso wie vorher. Jedoch dieses Mal werden die „falsch“ gemessenen Photonen zur Überprüfung, ob der Übertragungskanal abgehört wurde, verwendet. So können mehr Photonen als vorher verwendet werden.

## 3.5 Die wechselwirkungsfreie Quantenmessung

Stellen wir uns einen vollkommen dunklen Raum vor, von dem man vermutet, dass in der Mitte eine Bombe liegt, die bei jeder Berührung und auch bei jeder Wechselwirkung mit einem Photon explodiert. Es ist also undenkbar, dass man irgendwie feststellen kann, ob die Bombe wirklich dort liegt, ohne dass die Bombe explodiert, wenn man sie entdeckt. Oder ist es doch irgendwie möglich?

Grundsätzlich muss man mit einem Objekt immer irgendwie eine Wechselwirkung eingehen, um es festzustellen. In unserem Fall müssen die Photonen der Taschenlampe auf die Bombe treffen und reflektiert werden, damit wir sie sehen. Überraschenderweise eröffnet die Quantenphysik hier eine Möglichkeit, die Wechselwirkung zu umgehen.

### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

Schauen wir uns Abbildung 3.12 an. In dieser ist ein sogenanntes Machzender-Interferometer dargestellt.<sup>17</sup> Ein Lichtstrahl trifft auf einen Strahlteiler. Der Strahlteiler teilt den Lichtstrahl in zwei Strahlen mit gleicher Intensität. Sowohl die Strahlenteiler als auch die Spiegel verschieben die Phase bei der Reflexion um  $\pi/2$ . Nach den Spiegeln treffen die zwei Lichtstrahlen auf einen Strahlteiler, der wieder von jedem einen Teil reflektiert und einen Teil durchlässt. Durch die Phasenverschiebungen der beiden Lichtstrahlen löschen sich die Lichtstrahlen beim Detektor D-dunkel aus und verstärken sich bei D-hell. Der untere Lichtstrahl (1) wurde, wenn er bei D-dunkel ankommt, um  $\pi/2$  verschoben (bei der Reflexion an Spiegel-K). Der obere Lichtstrahl (2) hingegen wurde, wenn er bei D-dunkel ankommt, um  $3\pi/2$  verschoben. Die nun um  $\pi$  gegeneinander verschobenen Strahlen löschen sich gegenseitig aus. Das Licht, das bei D-hell ankommt, wird auf beiden Wegen um  $\pi$  verschoben und die Strahlen verstärken sich daher. Dieser Effekt der Interferenz, wie das Überlagern von zwei Lichtstrahlen bezeichnet wird, ist durch die Welleneigenschaft des Lichtes gut zu erklären.

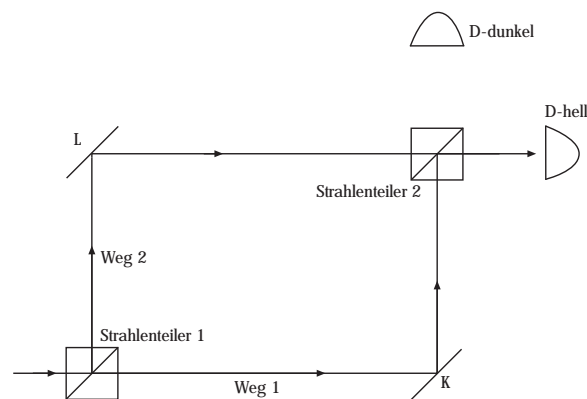


Abbildung 3.12: Ein Machzender-Interferometer

Nun kann man auch Photonenquellen, die nur einzelne Photonen aussenden, als Lichtquelle benutzen. Nun würde man meinen, dass es keine Interferenz geben kann, wenn nur einzelne Photonen den Versuchsaufbau durchqueren. Doch auch dann erreichen keine Photonen D-dunkel. Das heißt, die Unbestimmtheit, welchen Weg ein Photon nimmt, alleine reicht aus, um eine Interferenz zu erreichen. Wenn man jedoch einen der beiden Wege ausschließt, dann fällt natürlich die Interferenz weg und es kann ein Photon zu D-dunkel oder zu D-hell gelangen. Das Ausschließen des Weges kann auch durch unsere Bombe passieren, wie in Abbildung 3.13 zu sehen ist. Wenn man nun wieder nur ein einzelnes Photon durch den Versuchsaufbau schickt, dann nimmt es mit 50% Wahrscheinlichkeit bei dem ersten Strahlteiler den Weg 1 und trifft dann wieder mit 50% Wahrscheinlichkeit auf D-dunkel.

<sup>17</sup>Audretsch, Jürgen, *Verschränkte Welt*, S.22



### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

Wenn D-dunkel dieses Photon registriert, dann weiß man also, dass die Bombe im Weg liegt. Denn wenn keine Bombe den Weg 2 blockieren, dann würde es bei D-dunkel zu einer Interferenz kommen und es könnte so kein Photon zu D-dunkel gelangen. Es gibt also doch eine Möglichkeit festzustellen, ob eine Bombe in unserem Raum liegt, ohne dass sie von einem Photon getroffen wird. Es reicht die Möglichkeit aus, dass ein Photon auf die Bombe trifft, damit man sagen kann, ob die Bombe existiert oder nicht. Jedoch ist es eine sehr unsichere Art dies festzustellen, denn die Bombe würde mit 50% Wahrscheinlichkeit explodieren, da die Möglichkeit besteht, dass das Photon den Weg 2 nimmt und so die Bombe trifft. Außerdem trifft das Photon in 25% der Fälle auf D-hell und in diesem Fall kann man keine Aussage treffen, ob der Weg 2 blockiert ist oder nicht.

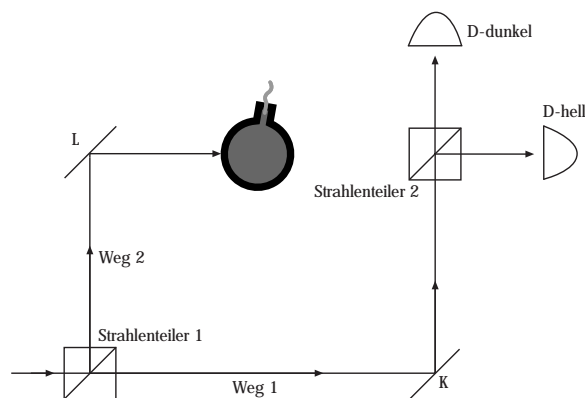


Abbildung 3.13: Ein Machzender-Interferometer mit Bombe

Dieses Risiko kann man aber verringern und hier kommen wieder polarisierte Photonen und der im Kapitel 3.1.3.2 besprochene Quantenzeron Effekt zur Verwendung. Wir sehen in Abbildung 3.14 horizontal polarisiertes Licht, welches durch einen umschaltbaren Spiegel auf einen Polarisationsrotator trifft. Dieser Polarisationsrotator hat die Eigenschaft, dass er das Licht um 15 Grad dreht. Das jetzt um 15 Grad verdrehte Licht trifft auf einen polarisierenden Strahlenteiler. Dieser Strahlenteiler lässt alles horizontal polarisierte Licht durch, vertikal polarisiertes Licht reflektiert er. Bei unpolarisiertem Licht würde das zwei entgegengesetzt polarisierte Lichtstrahlen mit gleicher Intensität ergeben. Unsere Photonen, die zu dem polarisierenden Strahlenteiler kommen, sind aber um 15 Grad verdreht. Das bedeutet, dass ein Photon mit ca. 93% Wahrscheinlichkeit ( $\cos^2(15^\circ)$ ) durchgeht bzw. mit 7% Wahrscheinlichkeit reflektiert wird. Nach dem Strahlenteiler sind nun für die zwei Wege zwei Spiegel angebracht, die das jetzt bei Weg 2 vertikal und bei Weg 1 horizontal polarisierte Licht zurück zum Strahlenteiler werfen. Dort kommt jetzt das Licht wieder zusammen und die Information, welchen Weg ein Photon genommen hat, geht verloren. Es

### 3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik

kommt zur Überlagerung und der Polarisationszustand der Photonen vor dem Eintritt in den Strahlenteiler wird wiederhergestellt. Wenn ein Photon diesen Versuchsaufbau mit dem Polarisationsrotator noch einmal durchläuft, dann wird die Polarisationsrichtung wieder um 15 Grad verdreht. Wenn ein Photon den Versuchsaufbau sechsmal durchlaufen hat und der umschaltbare Spiegel am Anfang das Photon wieder hinauslässt, dann ist es jetzt vertikal polarisiert.

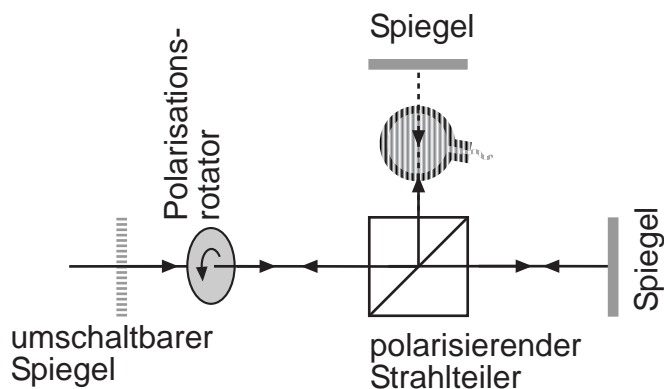


Abbildung 3.14: Wechselwirkungsfreie Messung mit erhöhter Erfolgsquote

Jetzt schauen wir uns an, was passiert, wenn der Weg 2 durch unsere Bombe blockiert wird. Ein Photon wird genauso wie vorher durch den Polarisationsrotator um 15 Grad verdreht zum polarisierenden Strahlenteiler kommen und geht dort mit ca. 93% durch. Wenn es nicht durchgeht, dann wird es reflektiert und von der Bombe absorbiert. Wenn es durchgeht, dann wird es am Spiegel reflektiert und geht durch den Strahlenteiler zurück. Das heißt, wenn es aus dem Interferometer kommt, dann muss es horizontal polarisiert sein.

Auch nachdem ein Photon den Aufbau sechsmal durchlaufen hat, bleibt die Polarisationsrichtung durch den Quanten-Zenon-Effekt horizontal. Man kann nun messen, ob das Photon vertikal oder horizontal polarisiert ist und daraus schließen, ob der Weg 2 blockiert ist oder nicht, ohne dass jemals ein Photon den Weg 2 genommen hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unser Photon sechsmal den Strahlenteiler passiert und nicht reflektiert wird, wenn der Weg 2 blockiert ist, beträgt ca.  $2/3$  (genau:  $(\cos^2(15^\circ))^6$ ). Die Wahrscheinlichkeit von

### *3 Polarisierte Photonen in der Quantenphysik*

ca.  $1/3$  die Bombe zu treffen ließe sich theoretisch noch verringern, indem man den Winkel des Polarisationsrotators verringert und die Zahl der Durchläufe erhöht.

## Quellen- und Literaturverzeichnis

Audretsch, Jürgen u. a. (Hrsg.), *Verschränkte Welt: Faszination der Quanten*, Weinheim : Wiley-VCH, 2002

Bennett, Charles H./Brassard, Gilles/Ekert, Artur K., „Wechselwirkungsfreie Quantenmessung“, *Spektrum der Wissenschaft - Digest*(1999)Nr.1 , S.90-98

Genz, Henning, *Gedankenexperimente*, 1.Aufl., Weinheim - New York - Chinchester - Brisbane - Singapore - Toronto: Wiley-VCH, 1999

Görnitz, Thomas, *Quanten sind anders: Die verborgene Einheit der Welt* Heidelberg - Berlin: Spektrum, Akad. Verl., 1999

Kwiat, Paul/Weinfurter, Harald/Zeilinger, Anton, „Wechselwirkungsfreie Quantenmessung“, *Spektrum der Wissenschaft - Digest*(1999)Nr.1 , S.20-27

Morsch, Oliver, „Zeno und der Quanten-Schnellkochtopf“, *Spektrum der Wissenschaft*(2002)H.2, S.14-16

Ne'eman, Yuval/Kirsh, Yoram, *Die Teilchenjäger*, übers. Bernhardt Simon, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo - Hong Kong - Barcelona - Budapest: Springer, 1995

Sexl u. a. *Physik 2*, 2.Aufl., Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1994

Zeilinger, Anton, „Grundlagenexperimente zur Quantenmechanik: Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon“, Arbeitsunterlage zum Fortbildungsseminar „Quantenmechanik und Astrophysik“, Wien 1988